Colonel (Ret.) profesor doctor inginer Ion EPURE

Ghid metodologic de învățare rapidă a noțiunilor fundamentale de MATEMATICĂ & FIZICĂ din gimnaziu și liceu

Editura BABEL
2024

CUPRINS

ARITMETICĂ

I. NUMERE ŞI OPERAŢII CU NUMERE

1. Baza sistemului de numeraţie se numeşte numărul de unităţi dintr-un anumit ordin cu care se poate forma o unitate de ordin imediat superior.

Sistemul de numeraţie zecimal este bazat pe convenţia că zece unităţi de un ordin oarecare conduc la o unitate de ordin imediat superior. Cifrele utilizate sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Există şi sisteme cu baza 2 (sistemul binar) – având cifrele 0 şi 1 – cu baza 3 (ternar) – având cifrele 0, 1, 2 – etc. Sistemul cu baza 60 este folosit dinaintea erei noastre, el fiind cel în care se măsoară timpul: 60 sec. = 1 min, 60 min. = 1 oră.

Observaţie. Ramura matematicii care lucrează cu baza 2 (sistemul binar) se numeşte Algebră logică sau Algebră bouleană.

2. Trecerea de la un sistem de numeraţie la altul

a) *Trecerea de la baza 10 la o altă bază.* Un număr scris în baza 10 se scrie într-o altă bază astfel: se împarte numărul dat la noua bază; câtul obţinut se împarte din nou la noua bază ş.a.m.d. până se ajunge la un cât inferior bazei considerate. Ultimul cât obţinut şi resturile succesive rezultate, scrise în ordinea inversă aflării lor, formează numărul în noua bază.

În mod practic, operaţia (de exemplu, pentru baza 2) se efectuează astfel.

$253 \rightarrow 11111101_{(2)}$

b) *Trecerea de la o bază oarecare la baza 10.* Pentru efectuarea acestei conversii se procedează astfel: sub fiecare cifră a numărului, scris în altă bază decât 10, se scrie, începând de la dreapta către stânga (deci de la cifra cea mai puţin semnificativă – ultima din dreapta), baza în care este scris numărul la putere crescătoare, începând cu zero. Numărul în baza 10 se obţine făcând suma dintre produsele cifrelor din numărul dat şi valoarea corespunzătoare bazei la puterea indicată.

Exemple:

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1_{(2)} \rightarrow 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 1\cdot2^5 + 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 128 + 64 +$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \qquad + 32 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 253$

$2^7\ 2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

$1\ 3\ 4\ 2_{(5)} \rightarrow 1\cdot2^7 + 1\cdot5^3 + 3\cdot5^2 + 4\cdot5^1 + 2\cdot5^0 = 125 + 75 + 20 + 2 = 222$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$5^3\ 5^2\ 5^1\ 5^0$

Observaţie. Puterea bazei corespunzătoare fiecărei cifre a numărului se numeşte ***rang***.

c) *Trecerea de la o bază oarecare la o altă bază diferită de 10* se face prin intermediul bazei 10 (adică, se trece numărul din baza dată în echivalentul lui în baza 10, iar apoi acesta se transformă în baza cerută).

3. Extragerea rădăcinii pătrate. A extrage rădăcina pătrată a numărului X înseamnă a găsi un alt număr x, astfel încât $x^2 = X$.

Exemple: $\sqrt{36} = 6$ deoarece $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

$\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ deoarece $0{,}6^2 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$

Pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr întreg se procedează astfel (exemplu: $\sqrt{6315169}$):

- se descompune numărul dat în grupe de câte două cifre începând de la dreapta la stânga (ultima grupă poate fi alcătuită dintr-o singură cifră: 6 31 51 69);
- se extrage rădăcina pătrată din numărul format de prima grupă (se obţine 2), care va fi prima cifră a rădăcinii căutate;
- se scade pătratul ei (4) din prima grupă (6) şi se obţine restul (2);
- lângă rest se scrie grupa următoare (31), iar din numărul format (231) se detaşează ultima cifră;
- se împarte numărul rămas (23) la dublul primei cifre a rădăcinii obţinute (2 x 2 = 4). Câtul obţinut (5) este a doua cifră a rădăcinii căutate;
- câtul obţinut (5) se scrie lângă dublul rădăcinii (4) şi numărul format (45) se înmulţeşte cu acest cât (5);
- se scade produsul obţinut (225) din numărul (231) format prin scrierea grupei a doua (31) lângă primul rest (2);
- lângă noul rest (6) se scrie grupa următoare (51) şi se trece la aflarea celei de a treia cifre a rădăcinii căutate folosind acelaşi procedeu; de data aceasta se va dubla numărul format din cele două cifre ale rădăcinii aflate (25).

Operaţia se aşează astfel:

$\sqrt{6.31.51.69}$	2 5 1 3
4	4 5 x 5 = 2 2 5
2 3 1	5 0 1 x 1 = 5 0 1
2 2 5	5 0 2 3 x 3 = 1 5 0 6 9
/ / 651	
501	
1 5 0 6 9	
1 5 0 6 9	
/ / / / /	

4. Operații cu măsurile sistemelor nemetrice. Unitățile de măsură pentru timp și pentru unghiuri sunt unități care nu respectă regulile numerotației zecimale (baza 10 de calcul), ele fiind exprimate în baza 60. De aceea, operațiile care exprimă asemenea unități se efectuează astfel:

a) *Adunarea*

7 h 53 min 36 s +

6 h 18 min 29 s

13 h 71 min 65 s = 14 h 12 min 05 s,

deoarece 65 s = 1 min **05 s**; 71 min + 1 min = 72 min = 1 h + **12min**; 13 h + 1 h = **14 h**.

b) *Scăderea*

43 h 16 min 21 s –	se scrie	42 h 75 min 81 s –
8 h 37 min 42 s		8 h 37 min 42 s
		34 h 38 min 39 s

unde s-a luat un minut din minutele descăzutului și s-a transformat în secunde pentru ca din acestea să se poată scădea 42 s; s-a luat o oră din orele descăzutului și s-a transformat în minute pentru ca din acestea să se poată scădea 37 min.

a) *Înmulțirea* cu un număr întreg. Se înmulțește numărul întreg cu fiecare grupă și apoi se ține seama de relațiile existente între unitățile de ordin superior (60” = 1’; 60’, = 1°).

Exemplu: 14° 59’ 26” x 6

84° 354’ 156” = 89° 56’ 36”

deoarece 156” = 2·60” + 36” = 2’ + 36”;

354’ + 2’ = 356’ = 5·60’ + 56’ = 5° + 56’;

84° + 5° = 89°.

c) *Împărțirea* printr-un număr întreg. Operația se face pe grupe, începând cu grupa celor mai mari unități. Restul se transformă și se adună la grupa imediat următoare.

Exemplu: 89° 56’ 36” : 6 = 14° 59’ 26”

Operația se așează astfel:

89° 56’ 36”	6
6	14° 59’ 26”
29	
24	
/ 5° 300’	

356'

30

/56

54

/ 2' = 120"

156"

12

/36

36

//

Observație. Împărțirea se poate face și astfel: se exprimă măsura în cea mai mică unitate și se efectuează o împărțire obișnuită. Rezultatul poate rămâne în aceste unități, mici, sau se transformă, prin împărțirea succesivă la 60, în unități de ordin superior.

II. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR

1. Reguli de divizibilitate. Dacă numărul D se împarte exact la numărul $\hat{I}$, se spune că D este ***divizibil*** prin $\hat{I}$, iar numărul $\hat{I}$ este un ***divizor*** al numărului D. Numărul D este un multiplu al numărului $\hat{I}$ și acest aspect se scrie D = **M**$\cdot\hat{I}$. **M** este echivalentul câtului–C, împărțirii numărului D-deîmpărțitul, la numărul $\hat{I}$-împărțitorul. Cu această echivalență se poate scrie:

Teorema împărțirii fără rest: $D = C\cdot\hat{I}$.

Teorema împărțirii cu rest este: $D = C\cdot\hat{I} + R$, unde R este restul împărțirii. Condiție, $R<\hat{I}$.

Numerele care nu au alt divizor decât cifra 1 și pe ele înșile se numesc ***numere prime***.

Dacă numerele a și b nu admit alt divizor comun decât unitatea, atunci numerele a și b se numesc ***numere prime între ele***.

Observații. 1. Toate numerele prime sunt prime între ele.

2. Chiar dacă numerele a și b nu sunt numere prime, ele pot fi prime între ele. *Exemplu*, numerele 8 și 25, numerele 8 și 9 etc.

NOTĂ: În mulțimea numerelor întregi se întâlnesc numere pare și numere impare.

Forma generală a **numerelor pare** este: $\boldsymbol{n = 2k}$,

$k \in Z=\{...,-n,...,-2,-1,0,1,2,...,n,...\}$.

Forma generală a **numerelor impare** este: $\boldsymbol{n = 2k \pm 1}$,

$k \in Z=\{...,-n,...,-2,-1,0,1,2,...,n,...\}$.

Condiţii de divizibilitate

Divizibilitatea	**Condiţia**
prin 2	ultima cifră să fie zero sau număr par (2, 4, 6, 8)
prin $4 = 2^2$	ultimele două cifre să fie zero sau să formeze un număr care se împarte exact la 4
prin 2^k	ultimele k cifre să fie zero sau să formeze un număr care se împarte exact la 2^k
prin 5	ultima cifră să fie zero sau 5
prin $25 = 5^2$	ultimele două cifre să fie zerouri sau să formeze un număr care se împarte exact la 25 (25, 50, 75)
prin 5^k	ultimele k cifre să fie zero sau să formeze un număr care se împarte exact la 5^k
prin 3	suma cifrelor să formeze un număr care se împarte exact la 3
prin 9	suma cifrelor să formeze un număr care se împarte exact la 9
prin 11	Diferenţa dintre suma cifrelor de rang par şi suma cifrelor de rang impar (sau invers) să fie zero sau multiplu de 11

Exemple: 1. Numărul 352 839 817 este divizibil prin 11 deoarece

$3 + 2 + 3 + 8 + 7 = 23$; $5 + 8 + 9 + 1 = 23$, iar $23 - 23 = 0$.

2. Numărul 452 925 este divizibil prin 11 deoarece

$4 + 2 + 2 = 8$; $5 + 9 + 5 = 19$, iar $19 - 8 = 11$.

2. Descompunerea în factori primi şi aflarea celui mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) şi a celui mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.).

NOTĂ. Descompunerea în factori primi a oricărui număr neprim este unică.

[ ] - **c.m.m.m.c.** - cel mai mic multiplu comun reprezintă [redacted], luaţi o singură dată.

( ) - **c.m.m.d.c.** - cel mai mare divizor comun reprezintă [redacted], luaţi o singură dată

Exemplu: $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

$\underline{8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11}$

c.m.m.m.c. $= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 813\,600$

c.m.m.d.c. $= 2^2 \cdot 7 = 28$.

Observații: 1) Făcând analogie între numerele pentru care se determină c.m.m.m.c. și c.m.m.d.c. și valorile acestor mărimi se poate spune că c.m.m.m.c. joacă rol de deîmpărțit (valoarea lui se poate împărți exact la toate numerele pentru care a fost determinat) iar c.m.m.d.c. de împărțitor (toate numerele pentru care s-a calculat se pot împărți exact la valoarea c.m.m.d.c.).

2) Descompunerea în factori primi a unui număr simplifică foarte mult extragerea radicalului din numărul respectiv, prin aplicarea următoarelor două relații:

- $\sqrt{a \cdot b \cdot c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$

- $\sqrt{a^n} = a^{n/2}$

III. FRACȚII

1. Fracții ordinare. Orice fracție are forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale.

a) Proprietăți

- *amplificarea*. Înmulțind și numărătorul și numitorul cu același număr natural diferit de zero, fracția nu-și schimbă valoarea.

Exemple:

$$\frac{^{2)}7}{5}=\frac{14}{10};\ \frac{^{3)}8}{6}=\frac{24}{18};\ \frac{^{8)}5}{3}=\frac{40}{24}$$

Observații: 1) Proprietatea se folosește pentru aducerea fracțiilor la același numitor (sau numărător).

2) Numitorul comun este un multiplu al numitorilor tuturor fracțiilor – de preferință c.m.m.m.c.-ul acestor numitori.

-*simplificarea*. Împărțind și numărătorul și numitorul cu același divizor (număr natural diferit de zero), fracția nu-și schimbă valoarea.

Exemple:

$$\frac{90^{(5}}{120}=\frac{18^{(3}}{24}\ \frac{6^{(2}}{8}=\frac{3}{4}$$

Observație: O fracție care nu se poate simplifica se numește *ireductibilă*.

b) Operații cu fracții ordinare

- *adunarea și scăderea*. Se aduc fracțiile la același numitor amplificând fiecare fracție cu câtul dintre numitorul comun și numitorul fracției respective (înainte se recomandă aducerea la forma cea mai simplă a tuturor fracțiilor – respectiv, să se facă toate simplificările).

Exemple:

$$\frac{6^{(2}}{10}+\frac{2}{3}-\frac{5^{(5}}{20}+\frac{5}{6}+\frac{11}{12}=\frac{^{12)}3}{5}+\frac{^{20)}2}{3}-\frac{^{15)}1}{4}+\frac{^{10)}5}{6}+\frac{^{5)}11}{12}=$$

$$=\frac{3\cdot 12}{60}+\frac{2\cdot 20}{60}-\frac{1\cdot 15}{60}+\frac{5\cdot 10}{60}+\frac{11\cdot 5}{60}=$$

$$=\frac{36+40-15+50+55}{60}=\frac{166^{(2}}{60}=\frac{83}{30}$$

- *înmulţirea.* Se înmulţesc numărătorii între ei şi numitorii între ei.

Înainte de efectuarea înmulţirilor este recomandabil să se efectueze toate simplificările posibile.

Exemplu:**Error! Bookmark not defined.**

$$\frac{13}{\underset{\underset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{12}}}\,x\,\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{14}}\,x\,\frac{\overset{14}{\cancel{28}}}{\cancel{3}}\,x\,\frac{1}{7}=\frac{13}{14}$$

Ridicarea la putere înseamnă o înmulţire repetată, deci se ridică şi numărătorul şi numitorul la puterea indicată.

Exemplu:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$$

- *împărţirea.* Se înmulţeşte fracţia deîmpărţit cu inversa fracţiei împărţitor (***inversul*** unui număr $a \neq 0$ este $\frac{1}{a}$).

Exemplu:

$$\frac{7}{12}:\frac{5}{36}=\frac{7}{\cancel{12}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{36}}}{5}=\frac{21}{5}$$

2) Fracţii zecimale. Sunt fracţii care au ca numitor puteri ale numărului 10, numere scrise cu virgulă – fiind compuse din parte întreagă, numărul dinainte de virgulă, şi parte zecimală, numărul de după virgulă.

Exemple:

$\frac{71}{10}=7{,}1$; $\frac{254}{1000}=0{,}254$ etc.

a) <u>*Proprietăţi*</u>

- Un număr zecimal nu se schimbă dacă se adaugă zerouri la dreapta ultimei cifre semnificative sau se suprimă zerourile ce se găsesc la dreapta ultimei cifre semnificative.

Exemple:

23,56 = 23,560 = 23,5600 = 23,560...0;

35,800 = 35,80 = 35,8

Un număr zecimal se înmulţeşte cu 10^n mutându-se virgula spre dreapta peste *n* zecimale.

Exemple:

65,052 x 10^3 = 65 052;

65,052 x 10^7 = 650 520 000

b) *Operaţii cu fracţii zecimale*

- *adunarea şi scăderea* se fac ca şi la numerele întregi, cu condiţia ca la aşezarea numerelor unul sub altul, virgula să se afle sub virgulă.

Exemple:

23,56 +	35,85 -
35,85	23,56
59,41	12,29

- *înmulţirea.* Se înmulţesc numerele zecimale considerate drept numere întregi şi la produsul obţinut se pune virgula – de la dreapta spre stânga – peste atâta cifre câte zecimale au cei doi factori împreună.

Exemplu:

$$65{,}32 \times 0{,}543 = \frac{6532 \cdot 543}{100000} = 35{,}46876$$

- *împărţirea.* Se mută virgula spre dreapta şi la deîmpărţit şi la împărţitor peste atâtea cifre câte zecimale are împărţitorul (aşadar, împărţitorul devine număr întreg). Dacă nu sunt suficiente zecimalele la deîmpărţit, se completează cu zerouri (*vezi proprietăţile*).

Exemple:

34,52872 : 0,542 = 34 528,72 : 542 = 63,706125

45,3 : 3,592 = 45 300 : 3 592 = 12,611358

- *extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr zecimal*

- Se verifică dacă numărul de zecimale este alcătuit dintr-un număr par de cifre. Dacă nu, se adaugă zero;

- Se desparte numărul de la virgulă spre stânga şi spre dreapta în grupe de câte două cifre;

- Se extrage rădăcina pătrată ca şi când numărul ar fi întreg, iar la rădăcină se pune virgula după atâtea cifre – de la stânga spre dreapta – câte grupe sunt la partea întreagă a numărului dat.

3) Fracţii zecimale periodice. O fracţie zecimală este periodică dacă partea zecimală conţine cifre care se repetă periodic, fie imediat după virgulă – fracţie periodică simplă, fie de la o anumită zecimală înainte - fracţie periodică mixtă.

Exemple:

0,363636... - fracţie periodică simplă; se mai scrie 0,(36)

3,52453453453...- fracţie periodică mixtă; se mai scrie 3, 52(453)

Grupa cifrelor care se repetă se numeşte ***perioadă***.

Fracţiile ordinare ai căror numitori descompuşi cuprind numai factori primi diferiţi de 2 şi 5 dau naştere la fracţii zecimale periodice simple, iar dacă printre factorii primi figurează 2 sau 5, fracţiile periodice obţinute sunt mixte. Fracţiile se consideră aduse la forma ireductibilă.

Exemple: $\frac{7}{3} = 2{,}333\ldots$ sau $\frac{7}{3} = 2{,}(3)$;

$\frac{6}{11} = 0{,}5454\ldots$ sau $\frac{6}{11} = 0{,}(54)$

$\frac{7}{6} = \frac{7}{2 \cdot 3} = 1{,}166\ldots\ 1{,}1(6)$

Transformarea fracţiilor zecimale periodice în fracţii ordinare

a) *Fracţie periodică simplă*

- fără parte întreagă

- se suprimă virgula şi parantezele şi se împarte numărul obţinut la numărul format de atâtea ori cifra 9 câte cifre are perioada.

Exemplu: $0{,}(48) = \frac{48^{(3}}{99} = \frac{16}{33}$

- cu parte întreagă

Metoda I

- se suprimă virgula şi parantezele;
- se scade din numărul obţinut numărul care reprezintă partea întreagă a numărului dat;
- diferenţa obţinută se împarte la numărul format de atâtea ori cifra 9 câte are perioada.